

**Національна академія наук України  
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова**

**Препринт 2009-3**

**М.Г. ЖУРБЕНКО, П.І. СТЕЦЮК**

**СУБГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЯРУЖНИХ  
ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ**

**Київ – 2009**

УДК 519.8

**Субградієнтні методи змінної метрики для розв'язування яружних задач оптимізації** / М.Г. Журбенко, П.І. Стецюк. – Київ, 2009. – 27 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова; 2009-3).

Розроблені та теоретично обгрунтовані нові субградієнтні методи з перетворенням простору, що орієнтовані на розв'язування яружних задач опуклої негладкої оптимізації:

- $\varepsilon$ -субградієнтний алгоритм, який забезпечує розв'язок задачі з заданою точністю;
- два субградієнтні методи феєрівського типу з прискореною збіжністю.

Для спеціалістів в області математичного програмування та застосувань чисельних методів оптимізації.

Іл. 1. Табл. 3. Бібліогр.: с. 25–26 (17 найменувань).

Рецензент доктор фіз.-мат. наук Є.О. Нурмінський

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Робота присвячена розробці і теоретичному обґрунтуванню нових субградієнтних методів з перетворенням простору, орієнтованих на розв'язування яружних задач.

У першому розділі (автор М.Г. Журбенко) наведено  $\varepsilon$ -субградієнтний алгоритм мінімізації опуклої функції, який використовує операцію перетворення простору та процедуру одновимірного спуску. Алгоритм забезпечує розв'язок задачі з заданою точністю. Наведена оцінка трудомісткості алгоритму при розв'язуванні задачі  $\varepsilon$ -оптимізації та результати розв'язування тестових задач.

У другому розділі (автор П.І. Стецюк) наведено два субградієнтні феєрівські методи змінної метрики для знаходження точки мінімуму опуклої функції  $f(x)$  при відомому її оптимальному значенні  $f^*$ . Вони використовують однорангові оператори перетворення простору змінних. Прискорення збіжності обох методів у порівнянні з класичним феєрівським методом без перетворення простору показано на прикладі яружних кусочно-лінійної і квадратичної функцій.

Робота виконана в рамках спільного українсько-російського проекту Державного фонду фундаментальних досліджень (ДФФД) України (Ф28.1/005) і Російського фонду фундаментальних досліджень (РФФД) (09-01-90413-Укр\_ф\_а) «Субградієнтні методи прискореної збіжності в задачах опуклої оптимізації».

## 1. $\varepsilon$ -СУБГРАДІЄНТНИЙ АЛГОРИТМ МІНІМІЗАЦІЇ З ПЕРЕТВОРЕННЯМ ПРОСТОРУ

У даному розділі наводиться опис модифікації запропонованого в [1]  $\varepsilon$ -субградієнтного алгоритму мінімізації опуклої функції. Алгоритм є модифікацією запропонованого в [1] методу і використовує операцію перетворення простору та процедуру одновимірного спуску. Алгоритм забезпечує розв'язок задачі з заданою точністю. Наводиться оцінка трудомісткості алгоритму при розв'язуванні задач  $\varepsilon$ -оптимізації та результати розв'язування тестових задач.

**1.1. Постановка задачі. Агрегований субградієнт.** Розглядається задача мінімізації обмеженої знизу опуклої функції  $f(x)$  в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $R^n$ :  $f^* = \min\{f(x) | x \in R^n\}$ .

Для заданого числа  $\bar{\varepsilon} \geq 0$  позначимо  $X^*(\bar{\varepsilon})$   $\bar{\varepsilon}$ -оптимальну множину:

$$X^*(\bar{\varepsilon}) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f^* + \bar{\varepsilon}\}. \quad (1.1)$$

Довільну точку  $\tilde{x} \in X^*(\bar{\varepsilon})$  та значення функції  $\tilde{f} = f(\tilde{x})$  будемо називати розв'язком задачі  $\bar{\varepsilon}$ -оптимізації ( $\bar{\varepsilon}$ -розв'язком).

Нехай задана куля  $D(z, R)$  початкової локалізації  $\bar{\varepsilon}$ -розв'язку:  $z \in R^n$  – центр кулі,  $R > 0$  – його радіус. Припустимо, що куля  $D(z, R)$  містить  $X^*(\bar{\varepsilon})$  (це припущення робиться для стислості викладення – всі твердження справедливі і для умови  $D(z, R) \cap X^*(\bar{\varepsilon}) \neq \emptyset$ ).

Будемо використовувати дещо відмінне від класичного визначення  $\varepsilon$ -субградієнта [2]. Вектор  $g \in R^n$  називається умовним  $(\varepsilon, \tilde{f})$ -субградієнтом функції  $f(x)$  в точці  $z$ , якщо  $\forall x \in D(z, R)$  виконується нерівність:

$$f(x) \geq \tilde{f} + (g, x - z) - \varepsilon, \quad (1.2)$$

де  $\tilde{f} \geq f^*$ ;  $\varepsilon \in R^1$ . Значення  $\tilde{f}$ , одержане на ітерації алгоритму розв'язування задачі  $\bar{\varepsilon}$ -оптимізації, зазвичай дорівнює отриманому рекордному значенню функції  $f(x)$ . Якщо значення  $f^*$  відомо апіорі, то  $\tilde{f} = f^*$ . Звичайне класичне визначення  $\varepsilon$ -субградієнта [3] відповідає означенню  $(\varepsilon, \tilde{f})$ -субградієнта (1.2) при  $\tilde{f} = f(z)$ ;  $\varepsilon \geq 0$ . Зазначимо, що наведене визначення  $(\varepsilon, \tilde{f})$ -субградієнта є деталізацією визначення  $\alpha$ -субградієнта в [4]: параметр  $\alpha = \tilde{f} - \varepsilon$ .

Узагальнений градієнт функції  $f(x)$  у точці  $z$  у класичному розумінні [5] є  $(0, f(z))$ -субградієнтом.

Позначимо  $G(\varepsilon, \tilde{f}, z)$ ,  $\partial f(z)$  множину  $(\varepsilon, \tilde{f})$ -субградієнтів і множину узагальнених градієнтів функції  $f(x)$  в точці  $z$  відповідно:  $\partial f(z) = G(0, f(z), z)$ . Далі вважається, що алгоритми обчислення  $f(x)$  та  $g(x) \in \partial f(x)$  у довільній точці  $x$  відомі.

Нехай  $g \in G(\varepsilon_1, \tilde{f}_1, z_1)$ ;  $f^* \leq f_2 \leq f(z_2)$ , тоді  $g \in G(\varepsilon_2, \tilde{f}_2, z_2)$ , де

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 - (g, z_2 - z_1). \quad (1.3)$$

Таким чином,  $(\varepsilon, \tilde{f})$  – субградієнт у деякій точці  $z_1$  є  $(\varepsilon, \tilde{f})$  – субградієнтом у будь-якій іншій точці  $z_2$ . Формула (1.3) визначає правило перерахунку параметрів  $(\varepsilon, \tilde{f})$  – субградієнта.  $G(\varepsilon, \tilde{f}, z)$  за своїми властивостями аналогічна множині  $\partial f(z)$  (опуклість, замкнутість тощо, наприклад,  $\{0 \in G(\varepsilon, \tilde{f}, z), \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}\} \Leftrightarrow \{\tilde{f} \leq f^* + \bar{\varepsilon}\}$ ).

Нехай  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq \tilde{f} - \bar{\varepsilon}\}$ .

Зазначимо, що:

$$\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}) = \emptyset \Rightarrow \{\tilde{f} \in \bar{\varepsilon} - \text{рішенням}\}; \tilde{f} \geq f^* + 2\bar{\varepsilon} \Rightarrow X^*(\bar{\varepsilon}) \subset \tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}).$$

Позначення:

$P(z, \eta) = \{x \in R^n \mid (x - z, \eta) = 0\}$  – площина, що проходить через  $z$  з нормаллю  $\eta \in R^n, |\eta| > 0$ ;

$P^+(z, \eta) = \{x \in R^n \mid (x - z, \eta) \geq 0\}$  – півпростір, який визначається площиною  $P(z, \eta)$ .

Нехай

$$g \in G(\varepsilon, \tilde{f}, z); h = (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) / |g|; \tilde{z} = z - hg / |g|. \quad (1.4)$$

Тоді  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}) \subset P^+(z - \tilde{z}, -g)$ . Цей факт відповідає звичайній побудові відсікаючих площин "зі зсувом". Величина  $y = \tilde{z} - z$  (зсув з точки  $z$ ) визначається розв'язком такої задачі:

$$\min \frac{1}{2} |y|^2, \quad (1.5)$$

$$(g, y) \leq -\tilde{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

де  $\tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon$ .

Нехай  $g_i \in G(\varepsilon_i, \tilde{f}, z)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 1$ ,  $\tilde{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_i$ . Тоді  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f})$  міститься в перетині підпросторів:  $(g_i, x - z) \leq -\tilde{\varepsilon}_i$  (не виключається, що цей перетин є пустою множиною).

Визначимо поняття агрегованого  $\varepsilon$ -субградієнта функції  $f(x)$  у точці  $z$ . Нехай  $\Sigma = \{g_i, i = 1, \dots, m\}$ ,  $g_i \in G(\varepsilon_i, \tilde{f}, z)$ ,  $m \geq 1$ , і  $G$  – матриця  $n \times m$ ,  $i$ -м стовпцем якої є вектор  $g_i$ ;  $\tilde{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon} - \varepsilon_1, \bar{\varepsilon} - \varepsilon_2, \dots, \bar{\varepsilon} - \varepsilon_m)$ . Тоді, узагальнюючи (1.5)–(1.6), вектор зсуву  $y$  для множини  $\varepsilon$ -субградієнтів  $\Sigma(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}, z)$  у точці  $z$  визначимо розв'язком такої задачі:

$$\min \frac{1}{2} |y|^2, \quad (1.7)$$

$$G^T y \leq -\tilde{\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Якщо система (1.8) несумісна, то вектор  $y$  не визначений.

Зміст задачі (1.7)–(1.8) очевидний і пояснюється наступними твердженнями, що легко доводяться.

Якщо  $\max \{\tilde{\varepsilon}_i, i = 1, 2, \dots, m\} > 0$ , то система обмежень (1.8) сумісна (точка  $y = 0$  є допустимою точкою (1.8)).

**Лема 1.** Нехай система обмежень (1.8) несумісна. Тоді  $\tilde{f}$  є розв'язком задачі  $\bar{\varepsilon}$ -оптимізації і опукла оболонка множини  $\varepsilon$ -субградієнтів  $\Sigma$  містить 0.

**Лема 2.** Нехай виконані такі умови:

а)  $\max \{\tilde{\varepsilon}_i, i = 1, 2, \dots, m\} > 0$ ;

б)  $y, \lambda$  – оптимальні значення прямих та двоїстих змінних задачі (1.7)–(1.8);

в)  $g = G\lambda / \sum_{i=1}^m \lambda_i$ ;

г)  $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . (1.9)

Тоді

$$g \in G(\varepsilon, \tilde{f}, \tilde{z}), \quad (1.10)$$

$$\tilde{z} = z + \tilde{y} = z - \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon}{|g|^2} g. \quad (1.11)$$

(Зазначимо, що з умови а) випливає, що система (1.8) сумісна та  $\sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$ .)

Вектор  $g$ , який визначається у лемі 2, будемо називати агрегованим  $\varepsilon$ -субградієнтом множини субградієнтів  $\Sigma$ . Позначення  $g(\varepsilon, \Sigma)$ . При цьому умову а) будемо вважати виконаною. Якщо система (1.8) несумісна, то покладемо  $g(\varepsilon, \Sigma) = 0$ .

Зміст агрегованого  $\varepsilon$ -субградієнта достатньо зрозумілий з означення і пояснюється наступним твердженням.

Введемо відоме позначення  $g^* = Nr\{\Sigma\}$  – вектор мінімальної довжини, що належить опуклій оболонці множини  $\Sigma$ .

**Лема 3.** Нехай  $\varepsilon_i = \varepsilon > 0, i = \overline{1, m}$ . Тоді  $g(\varepsilon, \Sigma, z) = Nr\{\Sigma\}$ .

Таким чином, для множини  $\varepsilon$ -субградієнтів  $\Sigma$  з однаковими значеннями  $\varepsilon_i$  агрегований  $\varepsilon$ -субградієнт збігається з найкоротшим вектором опуклої оболонки множини  $\Sigma$ . Саме цей вектор зазвичай використовується при побудові  $\varepsilon$ -субградієнтних методів оптимізації у [6]. Вищевведене означення агрегованого субградієнта корисне з наступних міркувань. По-перше, при розв'язуванні задачі (1.14)–(1.15) може виявитися, що деяке значення  $\lambda_i > 0$ , навіть коли відповідне значення  $\varepsilon_i > \bar{\varepsilon}$ . Зазвичай такі  $\varepsilon$ -субградієнти при розв'язуванні задачі  $\bar{\varepsilon}$ -оптимізації не використовуються. По-друге, при використанні як агрегованого субградієнта вектора  $Nr\{\Sigma\}$  всі  $\varepsilon$ -субградієнти при виборі напрямку зсуву з точки  $z$  виявляються "рівноправними" щодо значень  $\varepsilon_i$ .

Використання агрегованого  $\varepsilon$ -субградієнта дозволяє за звичайною схемою їх побудови отримувати модифікації  $\varepsilon$ -субградієнтних методів мінімізації [7].

Введене означення і принцип використання агрегованого субградієнта має багато спільного з агрегатними субградієнтними методами [8] та методом лінеарізації [9].

**Твердження 1.** Для заданої точки  $z$ , напрямку спуску  $\eta$  ( $|\eta| = 1$ ) та  $\bar{\varepsilon} > 0$  гарантується обчислення конструктивною процедурою такого  $\varepsilon$ -субградієнта  $g \in G(\varepsilon, \tilde{f}, z)$ , що  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  і  $(g, \eta) \geq 0$ .

Для стислості викладення доведення твердження 1 не наводиться. Зазначимо, що цей алгоритм базується на процедурі одновимірної мінімізації функції  $f(x)$  за напрямком  $\eta$ .

**1.2.  $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм.** Наступні два твердження стосуються побудови описаних еліпсоїдів мінімального об'єму навколо підмножин кулі простої структури.

Позначимо  $W = D(z, R) \cap P^+(\tilde{z}, \eta)$  – частина кулі  $D(z, R)$ , утворена січною площиною  $P(\tilde{z}, \eta)$ , де  $\tilde{z} = z + h\eta$ ;  $0 \leq h < R$ ,  $|\eta| = 1$ ;  $W^*$  – еліпсоїд мінімального об'єму з центром у точці  $\tilde{z}$ , який містить множину  $W$ ;  $\tilde{D}^*(\tilde{z}, \tilde{R})$  – куля мінімального об'єму, яка містить еліпсоїд  $W^*$ ;  $V(K)$  – об'єм тіла  $K$ ;  $R_\alpha(\eta) = (\alpha - 1)\eta^T \eta + I$  – оператор розтягу простору [5] за напрямком  $\eta$  з коефіцієнтом  $\alpha$ .

**Твердження 2.**

$$\tilde{R} = \sqrt{R^2 - h^2};$$

$$\tilde{D}^*(z, \tilde{R}) = \Omega W^* = R_{\alpha^*}(\eta) W^*, \text{ де } \alpha^* = \sqrt{(R+h)/(R-h)};$$

$$q = V(W^*)/V(D(z, \tilde{R})) = \sqrt{(R-h)(R+h)} ((R-h)/(R+h))^{n/2}.$$

Позначимо  $W = D(z, R) \cap P^+(z, \eta_1) \cap P^+(z, \eta_2)$  – частина кулі  $D(z, R)$ , утворена січними площинами  $P(z, \eta_1), P(z, \eta_2)$ ;  $W^*$  – еліпсоїд мінімального об'єму з центром у точці  $z$ , який містить множину  $W$ ;  $\tilde{D}^*(z, \tilde{R})$  – куля мінімального об'єму, яка містить еліпсоїд  $W^*$ ;  $\eta^* = (\eta_2 - \eta_1)/|\eta_2 - \eta_1|$ ;  $\xi^* = (\eta_2 + \eta_1)/|\eta_2 + \eta_1|$ ;  $\{\tilde{\eta}_i\}$  – ортонормований базис підпростору, ортогонального векторам  $\eta^*, \xi^*$ ;  $\cos(\varphi) = (\eta_1, \eta_2) \leq 0$ ;  $\psi = \pi - \varphi$  ( $\psi$  – кут між площинами  $P(z, \eta_1)$  і  $P(z, \eta_2)$ ).

**Твердження 3.**

$$\tilde{R} = \sqrt{2} \cos(\psi/2) R; \tag{1.12}$$

$$\tilde{D}^*(z, \tilde{R}) = \Omega W^* = \{R_{\alpha^*}(\eta^*) \prod_{i=1}^{n-2} R_{\tilde{\alpha}}(\eta_i)\} W^*, \text{ де} \tag{1.13}$$

$$\alpha^* = \text{ctg}(\psi/2), \tilde{\alpha} = \sqrt{2} \cos(\psi/2); \tag{1.14}$$

$$q = V(W^*)/V(D(z, R)) = \sin(\psi). \tag{1.15}$$



Зазначимо, що вперше еліпсоїд  $W^*$  побудовано в роботі [10]. Проте в цій роботі використовується дещо інше перетворення еліпсоїда на кулю.

Оператор перетворення  $\Omega$  формули (1.13) можна подати у компактнішому вигляді:  $\Omega = \tilde{\alpha} R_{\alpha^*/\tilde{\alpha}}(\eta^*) R_{1/\tilde{\alpha}}(\xi^*)$ .

З твердження 2 випливає, що об'єм еліпсоїда  $W^*$  менший від об'єму кулі  $\tilde{D}^*(z, \tilde{R})$  тільки для  $\psi < \pi/2$  ( $\varphi > \pi/2$ ).

Нехай задано число  $\delta > 0$ . Наведемо ітеративний алгоритм генерації (принаймі) двох відсікаючих площин  $P(z, \eta_1)$ ,  $P(z, \eta_2)$  таких, що  $(\eta_1, \eta_2) = \cos(\varphi) \leq -1 + \delta$ .

Позначимо  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  – множина векторів  $e_i \in R^n, i = 1, \dots, m$ .  $Nr\{E\}$  – вектор опуклої оболонки множини  $E$  мінімальної довжини.

### 1-а ітерація.

Обчислюємо  $g_1 \in \partial f(z)$ . Якщо  $g_1 = 0$ , то завершення роботи алгоритму (задача мінімізації  $f(x)$  розв'язана), інакше  $e_1 = -g_1 / |g_1|$ .

Використовуючи процедуру одновимірної мінімізації за напрямком  $e_1$ , обчислюємо  $\varepsilon$ -субградієнт  $g_2 \in G(\varepsilon, \tilde{f}, z)$ , для якого  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $(g_2, e_1) \geq 0$  (див. твердження 1). Якщо  $g_2 = 0$ , то завершення (задача  $\bar{\varepsilon}$ -мінімізації  $f(x)$  розв'язана).

Покладемо:  $G_1 = \{g_1, g_2\}$ ;  $e_2 = -g_2 / |g_2|$ ;  $E_1 = \{e_1, e_2\}$ ;  $p_1 = Nr\{E_1\} = 1/2(e_1 + e_2)$ ;  $\eta_1 = e_1$ ;  $\eta_2 = e_2$ ;  $\cos(\varphi_1) = (\eta_1, \eta_2) \leq 0$ .

Якщо  $p_1 = 0$ , то завершення (задача  $\bar{\varepsilon}$ -мінімізації  $f(x)$  розв'язана).

Якщо  $\cos(\varphi_1) \leq -1 + \delta$ , то завершення, інакше перехід на наступну ітерацію.

Нехай на ітерації  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) отримано множину  $E_k$  ( $m_k = |E_k|$ ;  $2 \leq m_k \leq n$ ) і вектор  $p_k = Nr\{E_k\} \neq 0$ .

Ітерація  $(k+1)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

1. Використовуючи процедуру одновимірної мінімізації за напрямком  $p_k$ , обчислюємо  $\varepsilon$ -субградієнт  $g_{m+1} \in G(\varepsilon, \tilde{f}, z)$ , для якого  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $(g_{m+1}, p_k) \geq 0$  (див. твердження 1). Якщо  $g_{m+1} = 0$ , то завершення (задача  $\bar{\varepsilon}$ -мінімізації  $f(x)$  розв'язана). Зазначимо, що в результаті одновимірної мінімізації значення  $\tilde{f}$  може зменшитися. У цьому випадку виконується перерахунок  $(\varepsilon, \tilde{f})$  параметрів векторів множини  $G_k$  згідно (1.3).

2. Покладемо:  $\tilde{G}_{k+1} = G_k \cup g_{m+1}$ ;  $e_{m+1} = -g_{m+1} / |g_{m+1}|$ ;  $\tilde{E}_{k+1} = E_k \cup e_{m+1}$ ;  
 $p_{k+1} = Nr\{\tilde{E}_{k+1}\} = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ , де  $I$  – множина індексів  $i$ , для яких  $\lambda_i > 0$ . Якщо  $p_{k+1} = 0$ ,  
то завершення (задача мінімізації  $f(x)$  розв’язана). Зазначимо, що  $\lambda_{m+1} > 0$   
(внаслідок  $(g, \eta) \geq 0$ ), якщо  $p_{k+1} \neq 0$ , то  $n \geq |I| \geq 2$ .

3. Покладемо:  $G_{k+1} = \{g_i \in \tilde{G}_{k+1} \mid \lambda_i > 0\}$ ;  $E_{k+1} = \{e_i \in \tilde{E}_{k+1} \mid \lambda_i > 0\}$  ( $E_{k+1}$  – множина  
“активних” векторів з  $\tilde{E}_{k+1}$  щодо операції  $Nr\{\cdot\}$ ,  $n \geq |E_{k+1}| \geq 2$ ). Перенумеруємо  
вектори множини  $E_{k+1}$  таким чином, щоб  $E_{k+1} = \{e_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m > 0$   
(вектори  $G_{k+1}$  перенумеровуються відповідно  $E_{k+1}$ ).

4. Покладемо:  $\eta_1 = e_1$ ,  $\eta_2 = \xi / |\xi|$ , де  $\xi = \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} e_i$ ;  $\cos(\varphi_{k+1}) = (\eta_1, \eta_2)$ .

Якщо  $\cos(\varphi_{k+1}) \leq -1 + \delta$ , то завершення, інакше перехід до наступної ітерації.

**Твердження 4.** Алгоритм 1–4 є скінченим. При завершенні алгоритму виконується одна з умов: а) задача  $\bar{\varepsilon}$ -мінімізації  $f(x)$  розв’язана; б) отримано такі відсікаючі площини  $P(z, \eta_1), P(z, \eta_2)$ , що  $(\eta_1, \eta_2) = \cos(\varphi_{k+1}) \leq -1 + \delta$ .

Справедливі такі оцінки значень  $|p_{k+1}|$  та  $\sin(\psi_{k+1}) = \sin(\pi - \varphi_{k+1})$

$$|p_{k+1}| \leq 1 / \sqrt{2+k}; \quad (1.16)$$

$$\sin^2(\psi_{k+1}) \leq \frac{p_{k+1}^2(1-p_{k+1}^2)}{p_{k+1}^2(1-2/n) + (1/n)^2} \equiv \Phi(p_{k+1}^2). \quad (1.17)$$

Можна показати, що функція  $\Phi(p_{k+1}^2)$  правої частини (1.17) монотонно зростає для  $p_{k+1}^2 \in [0, 1/n]$ , причому  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(1/n) = 1$ . Тому оцінка (1.17) змістовна лише для  $p_{k+1}^2 < 1/n$ . Наприклад,  $\Phi(1/n^2) = \frac{1}{2}(1+1/n)$ . Тому, якщо  $p_{k+1}^2 \leq 1/n^2$ , то

$$\sin(\psi_{k+1}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(1+1/n) \left( \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ для } n \gg 1 \right).$$

Зазначимо, що при цьому, у відповідності з (1.14)–(1.15),  $q = \sin(\psi) \approx \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ ;

$$\alpha^* = \text{ctg}(\psi/2) \approx 1 + \sqrt{2} \approx 2.4; \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{2} \cos(\psi/2) \approx \sqrt{1 + \sqrt{2}/2} \approx 1.3.$$

В основі  $\varepsilon$ -субградієнтного алгоритму мінімізації, який пропонується, лежить така проста ідея. Задано число  $q$ ,  $0 < q < 1$ . Нехай на ітерації  $k$  маємо: точку  $x_k$ ;  $A_k$  – невироджене лінійне перетворення ( $B_k = A_k^{-1}$ );  $\tilde{f}_k$  – рекордне значення функції  $f(x)$ ;  $R_k$  – параметр еліпсоїда локалізації  $E_k$  множини  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}_k): E_k \equiv \{x \in R^n \mid (A_k(x - x_k), A_k(x - x_k)) \leq R_k\}$ ;  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}_k) \subset E_k$ . Ітерація  $k+1$  алгоритму виконується в перетвореному просторі  $Y_k = A_k X$ , де  $X$  – початковий простір змінних. Образом еліпсоїда  $E_k$  в просторі  $Y_k$  є куля  $D(y_k, R_k)$ , де  $y_k = A_k x_k$ . На ітерації  $k+1$  встановлюється факт розв'язання задачі  $2\bar{\varepsilon}$ -оптимізації або будується еліпсоїд  $\tilde{E}_{k+1}$  локалізації множини  $\tilde{Y}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}_{k+1}) \subset \tilde{E}_{k+1} \equiv \{y \in Y_k \mid (\Omega_{k+1}(y - y_{k+1}), \Omega_{k+1}(y - y_{k+1})) \leq R_{k+1}\}$ . При цьому  $V(\tilde{E}_{k+1}) \leq qV(D(y_k, R_k))$ . Побудова цього еліпсоїда і параметра  $\tilde{f}_{k+1}$  здійснюється шляхом використання процедур одновимірної мінімізації відповідно до алгоритму 1–4 та твердження 4. При цьому на кожній ітерації цього алгоритму обчислюються значення коефіцієнтів  $q_1$  і  $q_2$  зменшення об'ємів еліпсоїдів локалізації множини  $\tilde{X}(\bar{\varepsilon}, \tilde{f}_k)$  відповідно до тверджень 3 і 2. Нехай  $q_{k+1} = \min\{q_1, q_2\}$ . Якщо  $q_{k+1} \leq q$ , то алгоритм 1–4 припиняє роботу. Можливі два випадки.

$q_{k+1} = q_1$ . У цьому випадку оператор  $\Omega_{k+1}$  визначається оператором  $\Omega$  твердження 3. Значення параметра (крокового множника)  $h$  обчислюється в такий спосіб (відповідно до (1.4) і з урахуванням перетворення простору):  $h = (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) / |B_k^* g(x_k)|$ , де  $g(x_k) \in \partial f(x_k)$ ;  $\varepsilon = \tilde{f}_{k+1} - f(x_k)$ . Якщо  $h > R_k$ , то завершення – задача розв'язана. Інакше  $x_{k+1} = x_k - hB_k B_k^* g(x_k) / |B_k^* g(x_k)|$ .

$q_{k+1} = q_2 > q_1$ . У цьому випадку оператор  $\Omega_{k+1}$  визначається оператором  $\Omega$  з твердження 2. Перехід у нову точку не відбувається:  $x_{k+1} = x_k$ .

Перетворення простору на ітерації  $k+1$  визначається оператором  $\Omega_{k+1}$ :  $A_{k+1} = \Omega_{k+1} A_k$ .

За допомогою [6] можна довести твердження про ефективність наведеного алгоритму.

**Твердження 5.** Для числа ітерацій  $k$  алгоритму, за які він забезпечує розв'язання  $2\varepsilon$ -оптимізації, справедлива така оцінка:  $k \leq \left\lceil n \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln(1/q)} \right\rceil$ , де  $\gamma$  – відносна точність розв'язання задачі:  $\gamma = \bar{\varepsilon}/(RC)$ ,  $C$  – оцінка зверху норм субградієнтів у початковій кулі  $D(z, R)$ .

Якісна інтерпретація описаного алгоритму полягає у наступному. Алгоритм належить до класу методів з перетворенням простору. На кожній ітерації алгоритму перетворення здійснюється шляхом застосування операторів розтягу простору в ортогональних напрямках. Параметри перетворення визначаються побудовою еліпсоїдів локалізації  $\bar{\varepsilon}$ -розв'язку. Еліпсоїди локалізації будуються на основі інформації, що отримана в результаті застосування процедури одновимірної мінімізації за напрямками. У випадку, коли в результаті одновимірної мінімізації відбувається істотне поліпшення рекордного значення функції, перетворення простору можна інтерпретувати як розтяг у напрямі субградієнта. У протилежному випадку – як розтяг за напрямком, який ортогональний “яру” поверхонь рівня функції. На кожній ітерації забезпечується зменшення об'єму локалізації  $\bar{\varepsilon}$ -розв'язку, принаймі в задане число, (параметр алгоритму) раз. Оцінку ефективності алгоритму у твердженні 5 необхідно розуміти у поєднанні з трудомісткістю побудови множин локалізації  $\bar{\varepsilon}$ -розв'язку. Про цю трудомісткість можна судити за поясненнями до твердження 4. Відповідно до них для забезпечення істотного зменшення об'єму локалізації ( $\approx 0.7$  раз) досить застосування  $n^2$  процедур одновимірної мінімізації. Таким чином, згідно з цією оцінкою для такого коефіцієнта зменшення об'єму локалізації, трудомісткість однієї ітерації алгоритму може бути досить великою. Однак ця оцінка досить груба. Крім того, зазначимо, що поведінка алгоритму (на відміну від методу еліпсоїдів [7]) істотно залежить від конкретних характеристик функції, що мінімізується. Наведені в розділі 1.3 результати чисельних експериментів підтверджують цю особливість алгоритму.

**1.3. Чисельні експерименти.** У даному розділі наводяться результати чисельного дослідження ефективності  $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритму. Тестовими задачами є задачі

мінімізації двох функцій  $f_1(x) = \sum_{i=1}^n \rho_n^{i-1} x_i^2$  і  $f_2(x) = \sum_{i=1}^n \rho_n^{i-1} |x_i|$ , де параметр  $\rho_n$

обирався в залежності від розмірності задачі  $n$  за формулою  $\rho_n = 10^{6/(n-1)}$ . Таким чином, ступінь витягнутості ліній рівня («яружність») функцій визначається значенням параметра  $\rho_n^{n-1} = 10^6$ ; вона однакова для всіх функцій незалежно від числа змінних. Початкова точка  $x_i = 1.0, i = 1, 2, \dots, n$ . Параметр точності розв'язку за функціоналом  $\bar{\varepsilon} = 10^{-6}$ . Критерій завершення:  $f_k \leq 10^{-6}$ , де  $f_k$  – значення функції на ітерації  $k$ .

Результати розв'язання тестових задач мінімізації функцій  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  наведені в таблицях 1 і 2 відповідно, де прийнято такі позначення: nVarbl – число змінних; q – значення параметра зменшення об'єму локалізації  $\bar{\varepsilon}$  – розв'язку на ітерації; nIter – число ітерацій; nLStep\_Avrg – середнє число застосування алгоритму одновимірної мінімізації на одній ітерації; Alph\_Avrg – середнє значення коефіцієнта розтягу простору.

ТАБЛИЦЯ 1

| nVarbl | q    | nIter | nLStep_Avrg | Alph_Avrg |
|--------|------|-------|-------------|-----------|
| 10     | 0.99 | 107   | 1.364       | 1.661     |
| 10     | 0.7  | 56    | 3.214       | 3.035     |
| 50     | 0.99 | 435   | 1.205       | 1.6       |
| 50     | 0.7  | 153   | 4.255       | 2.759     |
| 100    | 0.99 | 711   | 1.136       | 1.592     |
| 100    | 0.7  | 243   | 4.407       | 2.744     |
| 200    | 0.99 | 1006  | 1.247       | 1.569     |
| 200    | 0.7  | 376   | 4.362       | 2.813     |

ТАБЛИЦЯ 2

| <b>nVarbl</b> | <b>q</b> | <b>nIter</b> | <b>nLStep_Avrg</b> | <b>Alph_Avrg</b> |
|---------------|----------|--------------|--------------------|------------------|
| 10            | 0.99     | 413          | 1.165              | 1.855            |
| 10            | 0.7      | 133          | 3.015              | 3.38             |
| 50            | 0.99     | 2594         | 1.076              | 1.465            |
| 50            | 0.7      | 455          | 6.868              | 2.601            |
| 100           | 0.9      | 4062         | 2.597              | 1.755            |
| 100           | 0.7      | 1559         | 9.201              | 2.547            |
| 200           | 0.99     | 8627         | 2.744              | 1.724            |
| 200           | 0.7      | 3070         | 11.19              | 2.517            |

Результати чисельних експериментів показують достатньо високу ефективність  $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритму і виявляють такі цікаві його особливості. Середнє число застосування алгоритму одновимірної мінімізації на одній ітерації виявляється неймовірно малим у порівнянні з наведеною гарантованою його оцінкою ( $n^2$ ). Навіть якщо параметр зменшення об'єму локалізації  $\bar{\varepsilon}$ -розв'язку на ітерації задається малим (0.99), середнє значення коефіцієнта розтягу простору виявляється суттєво більшим за одиницю.

## **2. СУБГРАДІЄНТНІ ФЕЄРІВСЬКІ МЕТОДИ ПРИСКОРЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ**

Задача знаходження точки мінімуму опуклої функції  $f(x)$  при відомому її оптимальному значенні  $f^*$  має ряд важливих застосувань. Так, наприклад, до неї зводиться загальна задача пошуку допустимої точки сумісної системи опуклих нерівностей. До неї зводиться і задача знаходження проекції на політоп, що є однією з центральних у рамках спільного українсько-російського проекту. Априорне знання  $f^*$  дозволяє використовувати для розв'язання цієї задачі сімейство субградієнтних алгоритмів феєрівського типу. Однак їхній недолік – повільна збіжність для яружних функцій (функцій з істотно витягнутими поверхнями рівня). Мета даного розділу – побудувати методи феєрівського типу, що мають прискорену збіжність при роботі з яружними функціями.

У підрозділі 2.1 наведена постановка задачі, описано найпростіший метод феєрівського типу (будемо називати його fejer) [11, 12] і проаналізована його повільна збіжність для яружних функцій. У підрозділі 2.2 розглянуто основні співвідношення для феєрівських процесів змінної метрики, наведені основні властивості однорангового еліпсоїдального оператора перетворення простору. У його основі лежить перетворення в кулю деякого спеціального еліпсоїда, описаного навколо тіла  $W$ , отриманого в результаті перетинання кулі і двох півпросторів, що проходять через його центр. У випадку тупого кута між нормальними півпросторів цей еліпсоїд містить тіло  $W$  і є мінімальним за об'ємом у рамках сімейства еліпсоїдів, центр яких збігається з центром кулі.

У підрозділі 2.3 наведені два субградієнтні методи змінної метрики, які використовують класичне феєрівське регулювання кроку. Методи fellg2 і fellg2p1 використовують одноранговий еліпсоїдальний оператор. Метод fellg2 перетворює простір за двома послідовними субградієнтами (якщо кут між ними тупий). Метод fellg2p1 використовує ще й агрегатний вектор, що є опуклою комбінацією обчислених раніше субградієнтів. Агрегатний вектор автоматично оновлюється (у тому випадку, коли на його основі не можна побудувати тупий кут). Прискорення збіжності обох методів у порівнянні з методом fejer показано на прикладі яружних кусочно-лінійної і квадратичної функцій.

Методика розділу може бути використана для прискорення методів феєрівського типу, розглянутих у роботах керівника проекту з російської сторони Є.О. Нурмінського [13, 14].

**2.1. Класичний феєрівський метод і проблема яружності.** Постановка задачі. Розглядається задача безумовної мінімізації:

$$\min f(x), \quad (2.1)$$

де  $f(x)$  – опукла функція векторного аргументу  $x \in R^n$ .  $R^n$  – евклідов простір розмірності  $n$  зі скалярним добутком  $(x, y)$ . Нехай множина екстремумів задачі (2.1) –  $X^*$  непорожня і відоме значення мінімуму  $f(x)$ :  $f^* = f(x)$ ,  $x \in X^*$ . Нехай  $\partial f(x)$  – субградієнт функції  $f(x)$  і для нього виконується наступна властивість:

$$(x - x^*, \partial f(x)) \geq m(f(x) - f^*), \quad \text{де } m \geq 1, \quad (2.2)$$

$\forall x \in R^n$  і  $\forall x^* \in X^*$ . У випадку кусочно-лінійної опуклої функції  $m = 1$ , квадратична опукла функція задовольняє властивості (2.2) з параметром  $m = 2$ . Не обмежуючи рівня узагальненості будемо вважати, що множина  $X^*$  складається з єдиної точки  $x^*$ .

Для  $\varepsilon > 0$  позначимо  $X_\varepsilon^* = \{x : f(x) - f^* \leq \varepsilon\}$ . Точку  $x_k \in X_\varepsilon^*$  будемо вважати розв'язком задачі (2.1) з точністю  $\varepsilon$  за функцією ( $\varepsilon$ -розв'язком).

Вхідними параметрами розглянутих далі методів будуть  $x_0$  і  $\varepsilon$ , де  $x_0$  – початкове наближення,  $x_0 \in R^n$ ,  $\varepsilon$  – точність, з якою потрібно розв'язати задачу (2.1) за функцією,  $\varepsilon > 0$ . Процес обчислень будемо зупиняти як тільки досягнута точка  $x_k \in X_\varepsilon^*$ .

Для розв'язування задачі (2.1) з точністю  $\varepsilon$  за функцією конструктивним є відомий субградієнтний метод, що використовує класичне феєрівське регулювання крокового множника в напрямку субградієнта [11, 12].

Дамо опис "класичного" феєрівського методу  $fejer(x_0, \varepsilon)$ .

На початку процесу маємо  $x_0 \in R^n$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Нехай на  $k$ -му кроці отримано точку  $x_k \in R^n$ , а  $f(x_k)$  і  $\partial f(x_k)$  – обчислені в ній значення функції і субградієнта. Тоді, якщо  $f(x_k) - f^* \leq \varepsilon$ , то  $x_k$  – потрібна точка і завершення роботи алгоритму. Інакше обчислюємо чергове наближення

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{\partial f(x_k)}{\|\partial f(x_k)\|}, \quad h_k = \frac{m(f(x_k) - f^*)}{\|\partial f(x_k)\|}$$

і переходимо до  $(k + 1)$ -го кроку.

**Теорема 1.** Нехай на кожному кроці методу  $fejer(x_0, \varepsilon)$  виконано  $\|\partial f(x_k)\| \leq C$ . Тоді він знаходить  $\varepsilon$ -розв'язок задачі (2.1), не більш, ніж за  $K$  кроків,

де  $K = \left\lceil \left( \frac{C \|x_0 - x^*\|}{m\varepsilon} \right)^2 \right\rceil + 1$ . Тут  $\lceil a \rceil$  – ціла частина дійсного числа  $a$ .



Незважаючи на теоретичну привабливість, метод  $fejer(x_0, \varepsilon)$  при досить малих  $\varepsilon$  користується поганою репутацією у практичному відношенні навіть для гладких опуклих функцій. Дійсно, коли напрямок антисубградієнта в точці є досить близьким до ортогонального до напрямку на мінімум, що характерно для яружних функцій, він не ефективний навіть для невеликих задач ( $n \sim 10$ ). Для негладких опуклих функцій, де яружність є скоріше правилом, ніж виключенням, метод  $fejer(x_0, \varepsilon)$  не ефективний для задач ще менших розмірів ( $n \sim 2 - 5$ ). Так, для мінімізації функції двох змінних  $f(x_1, x_2) = |x_1| + k|x_2|$  він збігається з швидкістю геометричної прогресії з знаменником  $\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$ , що близький до 1, навіть при порівняно невеликих значеннях  $k$ .

Ситуацію у кращу сторону для методів із класичним феєрівським кроком здатне змінити лінійне перетворення простору, спрямоване на вирівнювання структури поверхонь рівня функції у перетвореному просторі, наприклад, як це зроблено в  $r$ -алгоритмах [5, 15]. Це приводить нас до феєрівських процесів змінної метрики, розглянутих далі.

**2.2. Феєрівські методи змінної метрики й одноранговий еліпсоїдальний оператор.** Феєрівські методи змінної метрики. Нехай  $Y = AX$  – перетворений за допомогою лінійного оператора  $A$  простір аргументів. Тут  $A$  – невиврождена матриця розміром  $n * n$ . Нехай  $B$  – обернений до  $A$  оператор,  $B = A^{-1}$ . Тоді класичний феєрівський метод з перетворенням простору в  $X$  набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k - h_k B \frac{B^T \partial f(x_k)}{\|B^T \partial f(x_k)\|}, \quad h_k = \frac{m(f(x_k) - f^*)}{\|B^T \partial f(x_k)\|}, \quad (2.3)$$

що відповідає класичному феєрівському кроку в напрямку антисубградієнта в перетвореному просторі аргументів  $Y$

$$y_{k+1} = y_k - h_k \frac{\partial \varphi(y_k)}{\|\partial \varphi(y_k)\|}, \quad h_k = \frac{m(\varphi(y_k) - \varphi^*)}{\|\partial \varphi(y_k)\|}. \quad (2.4)$$

Тут  $y = Ax$  – образи точок з  $X$  у перетвореному просторі  $Y$ ,  $\varphi(y)$  – опукла функція, визначена в перетвореному просторі  $Y$ :  $\varphi(y) = f(A^{-1}y) = f(x)$ .  
 $\partial\varphi(y_k) = B^T \partial f(x_k)$  – субградієнт у точці  $y_k = Ax_k$  для функції  $\varphi(y)$ .

Нехай  $Y_k = A_k X$  – поточний простір аргументів. Тоді, поліпшуючи структуру поверхонь рівня  $\varphi_{k+1}(y)$  в черговому перетвореному просторі аргументів  $Y_{k+1} = T_{k+1} Y_k$ , природно від методів типу (2.3) очікувати більш ефективної роботи, ніж від методу *fejer*. Тут  $T_{k+1}$  – невироджена матриця розміром  $n * n$ , що задає перетворення  $Y_k$  в  $Y_{k+1}$ .

Основні співвідношення, які потрібні для реалізації такого процесу, це перерахування матриці  $B_{k+1}$  відповідно до

$$B_{k+1} = B_k T_{k+1}^{-1} \quad (2.5)$$

і перерахування субградієнтів для  $\varphi_{k+1}(y)$ , визначеної в  $Y_{k+1}$ , відповідно до

$$\partial\varphi_{k+1}(y) = (T_{k+1}^{-1})^T \partial\varphi_k(y). \quad (2.6)$$

Однак, не для кожного з лінійних перетворень простору можна обґрунтувати збіжність відповідних їм методів (2.3)–(2.6). Зокрема, просте обґрунтування субградієнтних методів з перетворенням простору, що використовують класичний феєрівський крок у напрямку субградієнта, допускають такі перетворення, які не збільшують оцінки відстані до множини екстремумів у перетвореному просторі аргументів. Це дозволяє зробити далі наведений лінійний оператор.

Одноранговий еліпсоїдальний оператор і його властивості. Нехай  $\xi, \eta \in R^n$  – вектори, такі що  $\|\xi\|=1, \|\eta\|=1$  і їхній скалярний добуток задовольняє умові  $(\xi, \eta) \neq 1$ ,  $I$  – одинична матриця розміром  $n * n$ .

Одноранговим еліпсоїдальним оператором є лінійний оператор з  $R^n$  у  $R^n$ , який у матричній формі представляється як

$$T_1(\xi, \eta) = I - \frac{1}{1 - (\xi, \eta)^2} \left( \left( 1 - \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} \right) \eta - (\xi, \eta) \xi \right) \eta^T. \quad (2.7)$$

Цей оператор має ряд цікавих властивостей, що дозволяє на його основі будувати й обґрунтовувати різного роду методи змінної метрики. Для оператора  $T_1(\xi, \eta)$ , заданого згідно (2.7), у випадку, коли  $(\xi, \eta)^2 \neq 1$ , існує обернений оператор

$$T_1^{-1}(\xi, \eta) = I + \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}} \left( (1 - \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}) \eta - (\xi, \eta) \xi \right) \eta^T.$$

Для нього справедливе таке твердження [16].

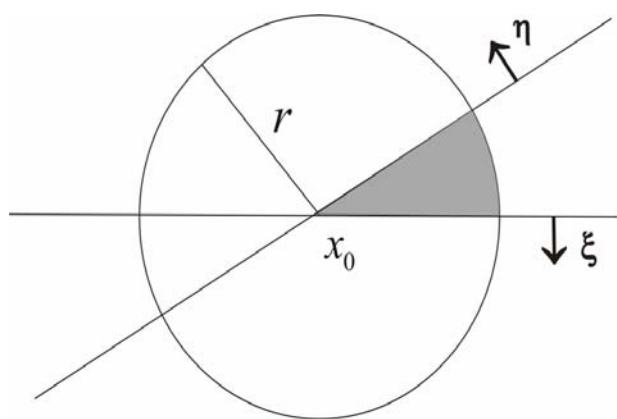
**Лема 4.** Нехай  $B_k$  – невироджена матриця розміром  $n * n$ ,  $p_1, p_2$  –  $n$ -вимірні вектори, такі, що  $\left( \frac{B_k^T p_1}{\|B_k^T p_1\|}, \frac{B_k^T p_2}{\|B_k^T p_2\|} \right)^2 < 1$ . Нехай  $B_{k+1} = B_k T_1^{-1}(\xi, \eta)$ , де  $\xi = \frac{B_k^T p_1}{\|B_k^T p_1\|}$  і  $\eta = \frac{B_k^T p_2}{\|B_k^T p_2\|}$ . Тоді матриця  $B_{k+1}$  невироджена і для неї виконані такі властивості:

а)  $\det(B_{k+1}) = \det(B_k) \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$ ; б)  $(B_{k+1}^T p_1, B_{k+1}^T p_2) = 0$ .

Геометричне тлумачення оператора  $T_1(\xi, \eta)$  пов'язане з оператором перетворення простору  $T_2(\xi, \eta)$  [10], який задається послідовними розтягами простору в двох ортогональних напрямках та має вигляд:

$$T_2(\xi, \eta) = R_{\alpha_1} \left( \frac{\xi + \eta}{\square \xi + \eta \square} \right) R_{\alpha_2} \left( \frac{\xi - \eta}{\square \xi - \eta \square} \right), \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi, \eta)}}, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi, \eta)}}.$$

У його основі лежить перетворення на кулю деякого спеціального еліпсоїда, описаного навколо тіла  $W$ , отриманого в результаті перетинання кулі і двох півпросторів, що проходять через його центр (див. рисунок). У випадку тупого кута між нормаллями півпросторів, цей еліпсоїд містить тіло  $W$  і є мінімальним за об'ємом у рамках сімейства еліпсоїдів, центр яких збігається з центром кулі. При цьому об'єми еліпсоїда і кулі співвідносяться як  $\sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$  (характеристика зменшення детермінанта оберненої матриці в лемі 4), що за умови  $(\xi, \eta) < 0$  рівносильно зменшенню об'єму області локалізації множини екстремумів.



РИСУНОК

простору тут реалізується в напрямку різниці двох нормованих векторів, і близьким до різниці двох субградієнтів він буде тоді, коли норми субградієнтів незначно відрізняються.

На відміну від оператора  $T_2(\xi, \eta)$ , оператор  $T_1(\xi, \eta)$  дозволяє будувати методи змінної метрики, що допускають однорангове перерахування матриці при переході в черговий перетворений простір аргументів. Ураховуючи, що еліпсоїд, який локалізує тіло  $W$ , має об'єм менший за об'єм кулі, для таких методів можна забезпечувати збіжність за монотонним зменшенням об'єму еліпсоїда, що локалізує множину розв'язків. Далі опишемо два субградієнтних методи з перетворенням простору на основі оператора  $T_1(\xi, \eta)$ , що використовують класичний феєрівський крок у перетвореному просторі аргументів. Ці перетворення не збільшують оцінку відстані до множини екстремумів у перетвореному просторі аргументів, що дозволяє для цих методів обґрунтувати кінцеву  $\varepsilon$ -збіжність за типом, як для методу  $fejer(x_0, \varepsilon)$ .

**2.3. Методи  $fellg2$  і  $fellg2p1$ .** Нехай  $g_k = B_k^T \partial f(x_k)$  і  $g_{k+1} = B_{k+1}^T \partial f(x_{k+1})$  – субградієнти  $\varphi_k(y)$  в  $Y_k = A_k X$  у точках  $y_k = A_k x_k$  і  $y_{k+1} = A_{k+1} x_{k+1}$ . Тут  $y_{k+1}$  отримана відповідно до класичного феєрівського кроку в перетвореному просторі аргументів  $Y_k$ . Останнє дає можливість гарантувати, що в точці  $y_{k+1}$  обидва субградієнти задають локалізацію множини розв'язків тілом  $W$  і можуть бути використані для застосування оператора  $T_1(\xi, \eta)$ . Тоді, якщо  $(g_k, g_{k+1}) \geq 0$ , то перетворення простору

не потрібно. Нехай  $(g_k, g_{k+1}) < 0$ . Тоді перетворення простору

$$Y_{k+1} = T_1 \left( \frac{g_k}{\|g_k\|}, \frac{g_{k+1}}{\|g_{k+1}\|} \right) Y_k \quad \text{або} \quad Y_{k+1} = T_1 \left( \frac{g_{k+1}}{\|g_{k+1}\|}, \frac{g_k}{\|g_k\|} \right) Y_k$$

дозволяє ортогоналізувати образи субградієнтів  $g_k$  і  $g_{k+1}$  у перетвореному просторі аргументів  $Y_{k+1}$ , забезпечивши при цьому більш кращі поверхні рівня для функції  $\Phi_{k+1}(y)$  в  $Y_{k+1}$ .

Ці прості міркування приводять до субградієнтного методу змінної метрики, що використовує класичний феєрівський крок у перетвореному лінійним оператором просторі.

**Метод  $fellg2(x_0, \varepsilon)$**  – класичний феєрівський метод з перетворенням простору, що використовує два послідовних субградієнта.

Перед початком обчислень маємо  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in R^n$ . Тоді, якщо  $f(x_0) - f^* \leq \varepsilon$ , то  $x_0$  – шукана точка і завершення. Інакше покладемо  $h_0 = \frac{m(f(x_0) - f^*)}{\|\partial f(x_0)\|}$ ,

$$\xi_0 = \frac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in R^n, \quad B_0 = I - \text{одинична матриця розміром } n * n.$$

Перед початком обчислень маємо  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in R^n$ . Тоді, якщо  $f(x_0) - f^* \leq \varepsilon$ , то  $x_0$  – шукана точка і завершення. Інакше покладемо  $h_0 = \frac{m(f(x_0) - f^*)}{\|\partial f(x_0)\|}$ ,

$$\xi_0 = \frac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in R^n, \quad B_0 = I - \text{одинична матриця розміром } n * n.$$

Нехай на  $k$ -му кроці отримані  $x_k \in R^n$ ,  $h_k, \xi_k \in R^n$ ,  $B_k$  – матриця  $n * n$ .

1. Обчислимо чергове наближення

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k.$$

2. Обчислимо  $f(x_{k+1})$ ,  $\partial f(x_{k+1})$ . Тоді, якщо  $f(x_{k+1}) - f^* \leq \varepsilon_f$ , то  $x_{k+1}$  – шукана точка і завершення. Інакше покладемо

$$\xi_{k+1} = \frac{B_k^T \partial f(x_{k+1})}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}, \quad h_{k+1} = \frac{m(f(x_{k+1}) - f^*)}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}.$$

3. Якщо  $(\xi_k, \xi_{k+1}) \geq 0$ , покладемо  $B_{k+1} = B_k$  і переходимо до 4. Інакше обчислюємо

$$\eta = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi_k, \xi_{k+1})^2}} - 1 \right) \xi_{k+1} - \frac{(\xi_k, \xi_{k+1})}{\sqrt{1 - (\xi_k, \xi_{k+1})^2}} \xi_k,$$

$$B_{k+1} = B_k (I + \eta \xi_{k+1}^T), \quad h_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\sqrt{1 - (\xi_k, \xi_{k+1})^2}}.$$

4. Переходимо до чергового кроку з  $x_{k+1}$ ,  $B_{k+1}$ ,  $\xi_{k+1}$ ,  $h_{k+1}$ .

Метод *fellg2* можна підсилити більш радикальним зменшенням об'єму. Якщо на  $k$ -кроці в перетвореному просторі  $Y = A_{k+1}X$  була реалізована операція перетворення простору, то, відповідно до леми 4, для функції  $\phi_{k+1}(y) = f(B_{k+1}y)$  субградієнти  $B_{k+1}^T g(x_k)$  і  $B_{k+1}^T g(x_{k+1})$  будуть ортогональними. У силу властивостей класичного феєрівського кроку і наявності тупого кута між послідовними субградієнтами  $B_k^T g(x_k)$  і  $B_k^T g(x_{k+1})$ , субградієнт  $B_k^T g(x_k)$  допускає паралельний перенос у точку  $y_{k+1} = A_k x_{k+1}$ , не відтинаючи при цьому точку  $y^* = A_k x^*$ . Тому в точці  $y_{k+1} = A_{k+1} x_{k+1}$  ми маємо два ортогональних субградієнта  $B_{k+1}^T g(x_k)$  й  $B_{k+1}^T g(x_{k+1})$  і перетин обумовлених ними півпросторів у перетвореному просторі змінних локалізує точку  $y^* = A_{k+1} x^*$ . Рух із точки  $y_{k+1}$  здійснюється відповідно до класичного феєрівського кроку в напрямку, зворотному до  $B_{k+1}^T g(x_{k+1})$ , у деяку точку  $y_{k+2} = A_{k+1} x_{k+2}$ , де  $x_{k+2}$  обчислюється відповідно до класичного феєрівського кроку в перетвореному просторі, внаслідок чого субградієнт  $B_{k+1}^T g(x_k)$  допускає паралельний перенос і в точку  $y_{k+2}$ .

Очевидно, що якщо обчислений у точці  $y_{k+2}$  субградієнт  $B_{k+1}^T g(x_{k+2})$  утворить тупий кут із двома попередніми, то можна зменшити об'єм області локалізації  $x^*$ , вибравши як вектори, що визначають оператор  $T_1(\xi, \eta)$  у точці  $y_{k+2}$ , відповідний субградієнт  $B_{k+1}^T g(x_{k+2})$  і вектор, що є опуклою комбінацією перших двох, так, щоб кут між ними був максимально тупим. Для нормованих векторів  $p_1, p_2, p_3$  у  $R^n$  це приводить до такої задачі:

$$\min(p, p_3),$$

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$

$$\|p\| = 1, (p_1, p_2) = 0,$$

яка легко розв'язується аналітично. Її розв'язок характеризує така лема [10].

**Лема 5.** Нехай  $p_1, p_2, p_3$  – вектори в  $R^n$ , такі, що  $\|p_1\| = \|p_2\| = \|p_3\| = 1$ ,  $(p_1, p_2) = 0$ , і умови  $(p_1, p_3) \geq 0$  і  $(p_2, p_3) \geq 0$  не виконуються одночасно. Тоді вектор

$$p = \begin{cases} p_1, & \text{якщо } (p_1, p_3) < 0 \text{ та } (p_2, p_3) \geq 0 \\ p_2, & \text{якщо } (p_1, p_3) \geq 0 \text{ та } (p_2, p_3) < 0 \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, & \text{якщо } (p_1, p_3) < 0 \text{ та } (p_2, p_3) < 0 \end{cases}$$

доставляє мінімум скалярному добуткові  $(p, p_3)$ .

$$\text{Тут } \lambda_1 = \frac{-(p_1, p_3)}{\sqrt{(p_1, p_3)^2 + (p_2, p_3)^2}} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = \frac{-(p_2, p_3)}{\sqrt{(p_1, p_3)^2 + (p_2, p_3)^2}}.$$

Для наступного кроку ця ситуація повторюється, тільки в якості першого вектора вже буде використовуватися не субградієнт, а вектор, що є опуклою комбінацією двох попередніх субградієнтів у черговому перетвореному просторі. Це дозволяє замкнути цикл обчислень і побудувати конструктивне правило використання як одного з векторів, що визначають оператор  $T_1(\xi, \eta)$ , агрегатного вектора, що є опуклою комбінацією обчислених раніше субградієнтів.

Це приводить до цікавого методу, що використовує агрегатний вектор, але не як напрямок руху з точки, як звичайно, а тільки для того, щоб підсилити коефіцієнти зменшення об'єму. Використання такого агрегатного вектора вигідно відрізняється від використання аналогічних векторів у методах агрегатного типу тим, що при цьому автоматично вирішується проблема "відновлення" агрегатного вектора.

**Метод  $fellg2p1(x_0, \varepsilon)$**  – класичний феєрівський метод з перетворенням простору, що використовує два послідовних субградієнта і вектори агрегатного типу, які є опуклою комбінацією обчислених раніше субградієнтів.

Перед початком обчислень маємо  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in R^n$ . Тоді, якщо  $f(x_0) - f^* \leq \varepsilon$ , то  $x_0$  – шукана точка і завершення. Інакше покладемо  $h_0 = \frac{m(f(x_0) - f^*)}{\|\partial f(x_0)\|}$ ,

$$\xi_0 = \frac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in R^n, \quad p_0 = 0 \in R^n, \quad B_0 = I_n \text{ – одинична матриця розміром } n * n.$$

Нехай на  $k$ -му кроці отримані  $x_k \in R^n$ ,  $h_k, \xi_k \in R^n$ ,  $p_k \in R^n$ ,  $B_k$  – матриця  $n * n$ .

1. Обчислимо чергове наближення

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k.$$

2. Обчислимо  $f(x_{k+1})$ ,  $\partial f(x_{k+1})$ . Тоді, якщо  $f(x_{k+1}) - f^* \leq \varepsilon$ , то  $x_{k+1}$  – шукана точка і завершення. У протилежному випадку покладемо

$$\xi_{k+1} = \frac{B_k^T \partial f(x_{k+1})}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}, \quad h_{k+1} = \frac{m(f(x_{k+1}) - f^*)}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}.$$

3. Обчислимо

$$\lambda_1 = \frac{-(p_k, \xi_{k+1})}{\sqrt{(p_k, \xi_{k+1})^2 + (\xi_k, \xi_{k+1})^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{-(\xi_k, \xi_{k+1})}{\sqrt{(p_k, \xi_{k+1})^2 + (\xi_k, \xi_{k+1})^2}}$$

і покладемо

$$p_{k+1} = \begin{cases} \lambda_1 p_k + \lambda_2 \xi_k, & \text{якщо } \lambda_1 > 0 \text{ та } \lambda_2 > 0, \\ p_k, & \text{якщо } \lambda_1 > 0 \text{ та } \lambda_2 \leq 0, \\ \xi_k, & \text{якщо } \lambda_1 \leq 0 \text{ та } \lambda_2 > 0, \\ 0, & \text{якщо } \lambda_1 \leq 0 \text{ та } \lambda_2 \leq 0. \end{cases}$$

4. Якщо  $(p_{k+1}, \xi_{k+1}) \geq 0$ , покладемо  $B_{k+1} = B_k$  і переходимо до 5. Інакше обчислюємо

$$\eta = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} - 1 \right) \xi_{k+1} - \frac{(p_{k+1}, \xi_{k+1})}{\sqrt{1 - (p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} p_{k+1},$$

$$B_{k+1} = B_k (I + \eta \xi_{k+1}^T), \quad h_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\sqrt{1 - (p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}},$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1 - (p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} (p_{k+1} - (p_{k+1}, \xi_{k+1}) \xi_{k+1}).$$



5. Переходимо до наступного кроку з  $x_{k+1}$ ,  $B_{k+1}$ ,  $\xi_{k+1}$ ,  $h_{k+1}$ ,  $p_{k+1}$ .

Справедлива така теорема.

**Теорема 2.** Послідовність  $\{x_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ , що генерується яким-небудь з методів:  $fellg2(x_0, \varepsilon)$  або  $fellg2p1(x_0, \varepsilon)$ , задовольняє нерівності

$$\|A_{k+1}(x_{k+1} - x^*)\|^2 \leq \|A_k(x_k - x^*)\|^2 - \frac{m^2(f(x_k) - f^*)^2}{\|B_k^T \partial f(x_k)\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тут  $A_k = B_k^{-1}$ ,  $A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$ .

З теореми 2 випливає

**Теорема 3.** Нехай на кожному кроці одного з методів:  $fellg2(x_0, \varepsilon)$  або  $fellg2p1(x_0, \varepsilon)$  виконані умови  $\|B_k\| \leq c_1$  і  $\|\partial f(x_k)\| \leq c_2$ . Тоді він отримує

$\varepsilon$ -розв'язок задачі (2.1) не більш, ніж за  $K$ -кроків, де  $K = \left\lceil \left( \frac{c_1 c_2 \|x_0 - x^*\|}{m\varepsilon} \right)^2 \right\rceil + 1$ .

Чисельні експерименти. Чисельну стійкість вищенаведених методів щодо точності розв'язання задач перевіримо для кусочно-лінійних і квадратичних функцій. Основним показником їхньої роботи будемо вважати число ітерацій, тобто число обчислень  $f(x)$  і  $\partial f(x)$ . Як тестові задачі виберемо кусочно-лінійні функції вигляду  $f_1(x) = \sum_{i=1}^n a^{i-1} |x_i - i|$  (умовимося їх позначати  $Sabs(a)$ ) і квадратичні опуклі функції  $f_2(x) = \sum_{i=1}^n a^{i-1} (x_i - i)^2$  (умовимося їх позначати  $Squad(a)$ ). Для кусочно-лінійних функцій  $Sabs(a)$  маємо  $m = 1$  і  $f_1^* = 0$ , а для квадратичних функцій  $Squad(a)$  маємо  $m = 2$  і  $f_2^* = 0$ . Ступенем витягнутості поверхонь рівня функцій будемо керувати за допомогою параметра  $a$  і перевіримо роботу методів при досить малих значеннях  $\varepsilon$ . Результати роботи для всіх трьох методів при різних значеннях  $\varepsilon$  та  $n = 20$  наведені в табл. 3, де "прочерк" означає, що метод не розв'язав задачу за 10000 ітерацій.

ТАБЛИЦЯ 3

| $\varepsilon$ | Sabs(1.25), $n = 20, m = 1$ |        |        | Squad(1.5), $n = 20, m = 2$ |        |        |
|---------------|-----------------------------|--------|--------|-----------------------------|--------|--------|
|               | fejer                       | fellg2 | feg2p1 | fejer                       | fellg2 | feg2p1 |
| $10^1$        | 289                         | 48     | 20     | 601                         | 32     | 15     |
| $10^0$        | 1163                        | 84     | 31     | 1205                        | 36     | 19     |
| $10^{-1}$     | 2737                        | 102    | 42     | 2047                        | 46     | 20     |
| $10^{-2}$     | 4306                        | 108    | 48     | 3079                        | 51     | 23     |
| $10^{-3}$     | 5869                        | 113    | 55     | 4237                        | 56     | 25     |
| $10^{-4}$     | 7425                        | 119    | 68     | 5463                        | 58     | 25     |
| $10^{-5}$     | 8943                        | 161    | 78     | 6719                        | 61     | 25     |
| $10^{-6}$     | –                           | 197    | 95     | 7985                        | 65     | 26     |
| $10^{-8}$     | –                           | 214    | 107    | –                           | 68     | 27     |
| $10^{-10}$    | –                           | 228    | 119    | –                           | 71     | 32     |
| $f(x_0)$      | 5567.1151                   |        |        | 2194649.4419                |        |        |

Як видно з табл. 3, методи з перетворенням простору набагато ефективніші за класичний феєрівський метод без перетворення простору. Число ітерацій, необхідних для отримання  $\varepsilon$ -розв'язку задач, збільшується незначно при значному зменшенні  $\varepsilon$ . Це підтверджує, що розглянуті перетворення простору, спрямовані на зменшення яружності поверхонь рівня функції, здатні для яружних функцій значно прискорити збіжність субградієнтних методів феєрівського типу.

### ВИСНОВКИ

У роботі розроблені нові субградієнтні та  $\varepsilon$ -субградієнтні чисельні методи змінної метрики з прискореною збіжністю для розв'язування негладких задач опуклої оптимізації. Обчислювальні процедури цих алгоритмів близькі до тих, які використовуються в  $r$ -алгоритмі [5] та дають змогу легко застосувати їх до багатопроцесорних комп'ютерів. У Швеції було проведено тестування  $r$ -алгоритму на прикладі складної мережевої комбінаторної задачі знаходження місць для

установки концентраторів [17]. Експеримент був поставлений на ЕОМ з 2048 паралельно працюючими процесорами і показав досить швидку збіжність алгоритму та легкість його розпаралелювання. До того ж можливість під час ітераційного процесу оцінити поточний результат за значенням цільової функції може дати значний ефект для паралельних алгоритмів, якщо ці методи застосувати для локальних підзадач знаходження локальних екстремумів у багатоекстремальних задачах. Вона дозволяє оцінити локальну поведінку багатоекстремальної функції в околі тієї чи іншої точки. При побудові паралельних алгоритмів за типом мультистарту цей факт природньо використати для того, щоб відсікати неефективні локальні підзадачі.

### Список літератури

1. *Журбенко Н.Г.* Об одном  $\varepsilon$ -субградиентном алгоритме минимизации // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2002. – С. 111–118.
2. *Журбенко Н.Г.* Об одном классе методов минимизации с преобразованием пространства // Методы решения экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1996. – С. 68–80.
3. *Lemaréchal C., Mifflin K.* Nonsmooth Optimization. – Oxford: Pergamon Press, 1978. – 180 p.
4. *Нурминский Е.А.*  $\alpha$ -субградиент выпуклых функций: определение и основные свойства. Дальневосточный мат. сб. – Вып. 1. – Владивосток: Дальнаука, 1995. – С. 132–136.
5. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 199 с.
6. *Журбенко Н.Г.* Оценка эффективности одного класса  $\varepsilon$ -субградиентных методов минимизации с преобразованием пространства // Оптимизация и ее приложения. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1997. – С. 49–54.
7. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

8. *Kiewiel K.* Methods of descent for nondifferentiable optimization. – Berlin: Springer–Verlag, 1985.– 1133: Lecture Notes Math. – 362 p.
  9. *Пиеничный Б.Н.* Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
  10. *Стецюк П.И.*  $r$ -алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.
  11. *Еремин И.И.* Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**. – № 5. – С. 994–996.
  12. *Поляк Б.Т.* Минимизация негладких функционалов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1969. – **9**. – № 3. – С. 507–521.
  13. *Нурминский Е.А.* Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – **48**. – № 12. – С. 2121–2128.
  14. *Нурминский Е.А.* Фейеровские процессы с малыми возмущениями // Доклады РАН. – 2008.– **422**. – Вып. 5. – С. 601–604.
  15. *Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51–59.
  16. *Стецюк П.И.* Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании (Ч. I) // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С. 97–119.
  17. *Damberg O., Migdalas A.* A data parallel space dilation algorithm for the concentrator location problem // DIMACS Series in Discr. Math., 22:57-80, DMS 1995.
-

27  
З М І С Т

|  |    |
|--|----|
| ВСТУП.....   | 1  |
| 1. $\varepsilon$ -субградієнтний алгоритм мінімізації з перетворенням простору ..... | 1  |
| 1.1. Постановка задачі. Агрегований субградієнт .....                                | 1  |
| 1.2. $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм.....  | 6  |
| 1.3. Чисельні експерименти. ....   | 11 |
| 2. СУБГРАДІЄНТНІ ФЕЄРІВСЬКІ МЕТОДИ ПРИСКОРЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ.....                        | 12 |
| 2.1. Класичний феєрівський метод і проблема яружності.....                           | 13 |
| 2.2. Феєрівські методи змінної метрики й одноранговий еліпсоїдальний оператор.....   | 15 |
| 2.3. Методи <i>fellg2</i> і <i>fellg2p1</i> .....                                    | 18 |
| ВИСНОВКИ .....   | 24 |
| Список літератури .....  | 25 |

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ЖУРБЕНКО Микола Георгійович

СТЕЦЬЮК Петро Іванович

СУБГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЯРУЖНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Редактор В.П. Замула

Підп. до друку 01.10.2009. Формат 60×84/16. Папір офс.  
Офс. друк. Гарн. Times. Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб.1,75.  
Обл.-вид. арк. 1,75. Зам. 101. Тираж 100 прим.

---

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України  
03680, МСП, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40